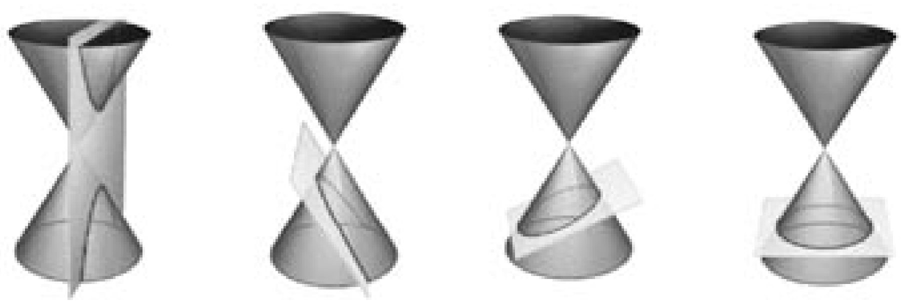
Matka 21 (2012./2013.) br. 82

KONIKE I DANDELINOVE KUGLE

Ivana Slovic, Zagreb

Vratimo se u daleku prošlost, točnije u 4. stoljeće prije Krista kada je živio Menehmo, pripadnik Platonove akademije u Ateni. On je otkrio da se presjekom stošca i ravnine dobiju do tada nepoznate krivulje. Menehmo je smatrao da vrsta krivulje ovisi o vrsti stošca, no Apolonije iz Perge dva je stoljeća kasnije pokazao da vrsta krivulje koju ćemo dobiti ovisi o nagibu ravnine koja siječe stožac. Apolonije je također uveo nazive koje danas koristimo: elipsa, parabola i hiperbola.

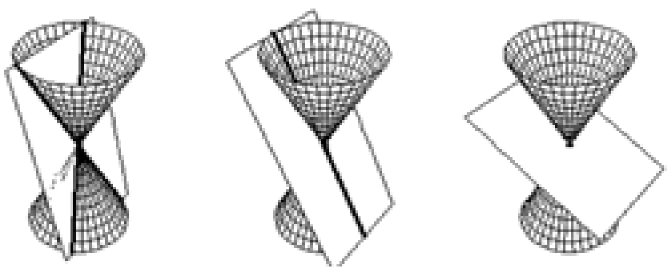
Krivulje koje su dobivene presjekom ravnine i stošca nazivaju se konike ili čunjosječnice. Taj naziv opravdava se time što se one dobiju presjekom ravnine i stošca, tj. čunja.



Ukoliko je presječna ravnina paralelna s dvije izvodnice stošca, tada se dobije hiperbola. Ako je presječna ravnina paralelna s jednom izvodnicom stošca, dobije se parabola, a ako presječna ravnina nije paralelna niti s jednom izvodnicom stošca, dobije se elipsa.

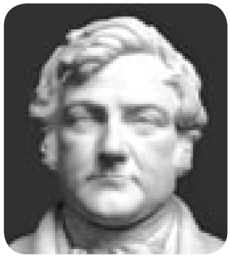
Zadatak 1. U kakvom položaju moraju biti presječna ravnina i stožac da bi se kao presjek dobila kružnica?

Zadatak 2. Što će se dobiti kao presjek stošca i ravnine koja je postavljena na sljedeći način:

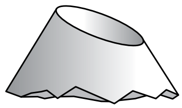


DANDELINOVE KUGLE

Dandelinove kugle diraju, ali ne sijeku, i ravninu i stožac.



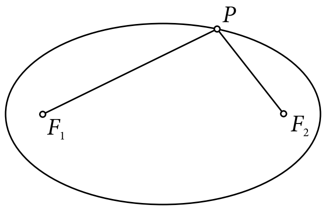
Germinal Pierre Dandelin (1794.-1847.) bio je francuski inženjer koji je živio u Belgiji. Godine 1822. otkrio je povezanost između presjeka stošca i ravnine, fokusa konika, te kugla upisanih u stožac koje diraju ravninu kojom je presječen.



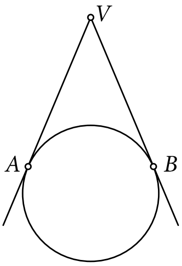
Uzmimo za primjer elipsu, dok je za ostale konike vrlo slično.

Elipsa je krivulja koja se dobije kao presjek stošca ravninom koja nije paralelna ni s jednom od izvodnica.

U planimetriji, elipsa je krivulja za koju vrijedi da je zbroj udaljenost od fokusa do neke točke na krivulji konstantan.



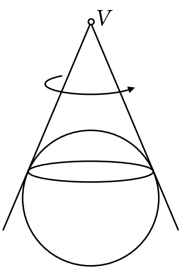
$|F_1P| - |F_2P| = a = \text{const}$



Na prvi pogled, nije očito da te dvije definicije definiraju isti matematički objekt. Kako bi pokazao da su te definicije ekvivalentne, Dandelin je prikazao domišljatu konstrukciju.

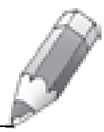
Kako bismo razumjeli tu konstrukciju, potrebno je sjetiti se nekih elementarnih stvari iz planimetrije:

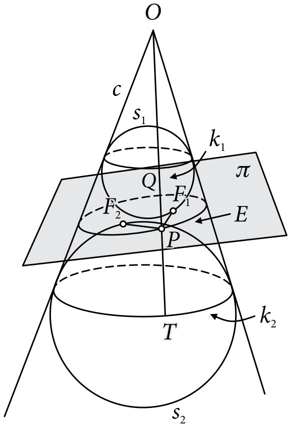
Zadana je kružnica i točka V izvan te kružnice. Iz točke V konstruirane su tangente na kružnicu. Udaljenosti $|AV|$ i $|BV|$ su jednake.



Ako rotiramo dobivenu figuru oko pravca koji prolazi kroz središte kružnice i točku V, dobit ćemo kuglu koja je upisana u stožac. Krivulja koju zatvaraju kugla i stožac je kružnica čije su točke jednako udaljene od vrha stošca.

Sad možemo prijeći na Dandelinovu konstrukciju.





DANDELINOV POUČAK

Ako uspravni kružni stožac presiječemo ravninom koja siječe sve njegove izvodnice i ne prolazi vrhom stošca, onda je presječna krivulja ili kružnica (ako je ravnina okomita na os stošca) ili elipsa.

(Na slici je skiciran presjek stošca ravninom π koja ne prolazi vrhom, siječe sve izvodnice stošca i kosa je prema njegovoj osi.)

Dokaz:

Upišimo u taj stožac kuglu koja dira ravninu odozgo i kuglu koja dira ravninu odozdo. Neka prva kugla S_1 dira ravninu u točki F_1, a druga S_2 u točki F_2. Pokazat ćemo da je presječna krivulja elipsa i da su točke F_1 i F_2 njezini fokusi.

U tu svrhu uzmemo na presječnoj krivulji bilo koju točku P. Gornja polukugla dira stožac uzduž kružnice k_1, donja uzduž kružnice k_2. Spojimo vrh stošca O s točkom P.

Ta izvodnica siječe k_1 u točki Q, a k_2 u točki T. Kako su duljine tangenata nacrtanih na kuglinu plohu iz točke izvan nje jednake duljine, to je $|PF_1| = |PQ|$ i $|PF_2| = |PT|$. Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo $|PF_1| + |PF_2| =$ $= |PQ| + |PT|$, dakle $|PF_1| + |PF_2| = |QT|$. Dužina $\overline{QT}$ je izvodnica uspravnog krnjeg stošca kojemu je donja osnovica krug omeđen kružnicom k_2, a gornja krug omeđen kružnicom k_1, pa je stoga $|QT| = 2a$, gdje je $a > 0$ realna konstanta.

Stoga je $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ za svaku točku P presječne krivulje, pa je ta krivulja elipsa sa fokusima F_1 i F_2.

Kugle korištene u ovom dokazu zovu se ***Dandelinove kugle***.

Zadatak 3. Svaki dio stošca ima jednu kuglu za svaki fokus. Elipsa ima dvije kugle, obje diraju isti plašt stošca. Koliko kugla ima hiperbola, a koliko parabola? Skicirajte kako bi izgledao svaki od ovih slučajeva.

Literatura

1. http://www.komal.hu/cikkek/dandelin/parabola.e.shtml
2. http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/konike/presjeci.html
3. http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/dandelin/index.asp